ÁLGEBRA

Profesor
Ricardo Espino
Lizama

FUNCIONES III

FUNCIONES ESPECIALES

1. – FUNCIÓN PAR

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ *y f una función* $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Se dirá que f es una ***función par*** *si y solo si cumple las siguientes condiciones*

1) $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \quad -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \longrightarrow$ DOMINIO SIMÉTRICO

2) $\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

Para comprobar que una función es par, es necesario comprobar ***ambas condiciones***

Ejemplo 1. – *Sea la función* $\boldsymbol{f}:]-4; 7] \to \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{x}^2$

Es sencillo comprobar que esta función cumple $\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

$$\text{ya que } f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 \quad \to f(-x) = x^4 + x^2 \quad \to \boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

Sin embargo también debemos comprobar que cumpla la ***primera condición***

es decir que si $x \in]-4; 7]$ *entonces* $-x$ *también pertenece a* $]-4; 7]$

lo cual no se cumple, por ejemplo $\boldsymbol{5} \in]-\boldsymbol{4}; \boldsymbol{7}]$ ***pero*** $-\boldsymbol{5} \notin]-\boldsymbol{4}; \boldsymbol{7}]$ $\quad \to$ ***f no es par***

PITAGORAS ACADEMIA

Ejemplo 2. – $\boldsymbol{Sea\ la\ función\ f:]-2;2[\to \mathbb{R}\ , y = f(x) = 2^{x^2} - cosx}$

Esta función sí es una ***función par***

$* \ Primero\ demostremos\ que\ \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$

$$\boldsymbol{f(x) = 2^{x^2} - cosx} \qquad \to f(-x) = 2^{(-x)^2} - \cos(-x) \qquad \to f(-x) = 2^{x^2} - cosx$$

$$\to \boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

y también se verifica la primera condición

$$\boldsymbol{x \in]-2;2[} \quad \to \quad -2 < x < 2 \qquad \to -2 < -x < 2 \qquad \to \boldsymbol{-x \in]-2;2[}$$

$\to \boldsymbol{f\ es\ par}$

2. – FUNCIÓN IMPAR

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ *y f una función* $\boldsymbol{f: A \to \mathbb{R}}$. $\boldsymbol{y = f(x)}$

Se dirá que f es una ***función impar*** *si y solo si cumple las siguientes condiciones*

$$\mathbf{1)} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \qquad -\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$$
$$\mathbf{2)} \quad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

Para comprobar que una función es impar, es necesario comprobar ***ambas condiciones***

Ejemplo 1. – *Sea la función* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y = f(x) = x^3 + x}$

Si bien esta función cumple $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + x} \quad \to f(-x) = (-x)^3 + (-x) \quad \to f(-x) = -x^3 - x \quad \to \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

No cumple la primera condición ya que si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+$ ***esto no implica que*** $-\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^+$

Lo cual se puede ver claramente en el hecho de que $\boldsymbol{f(3)}$ ***existe pero no existe*** $\boldsymbol{f(-3)}$

Ejemplo 2.– *Sea la función* $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}-\{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$, $\quad \boldsymbol{y = f(x) = x - senx}$

Esta función sí es ***impar***

esto se puede demostrar fácilmente verificando **las dos condiciones**

$$f(x) = x - senx \qquad \to f(-x) = (-x) - sen(-x)$$

$$\to f(-x) = -x - (-senx)$$

$$\to f(-x) = -x + senx$$

$$\to f(-x) = -(x - senx) \qquad \to \boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

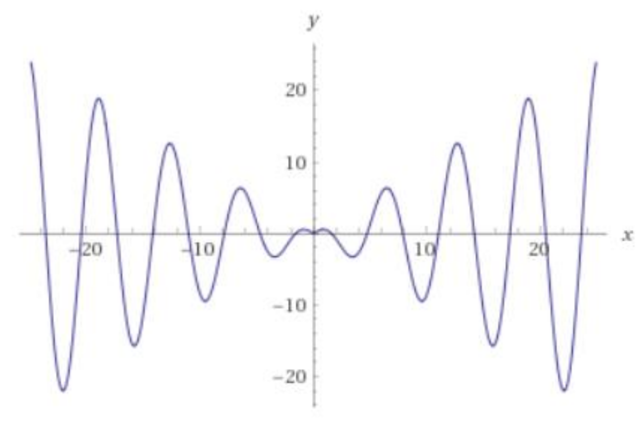
y también se verifica que para todo x del dominio existe $f(-x)$, *esto también se puede demostrar*:

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}-\{\mathbf{0}\} \qquad \to (-x) \in \mathbb{R}-\{0\} \qquad \to -x \in Domf \qquad \to \boldsymbol{f(-x)\ existe}.$$

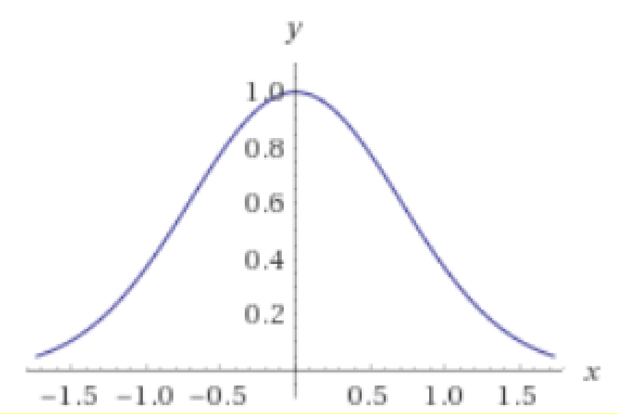
$\to$ ***f es impar***

Gráficamente podemos observar que los gráficos de las ***funciones pares*** *tienen una* ***simetría con respecto al eje Y***

$h(x) = |x|cosx$

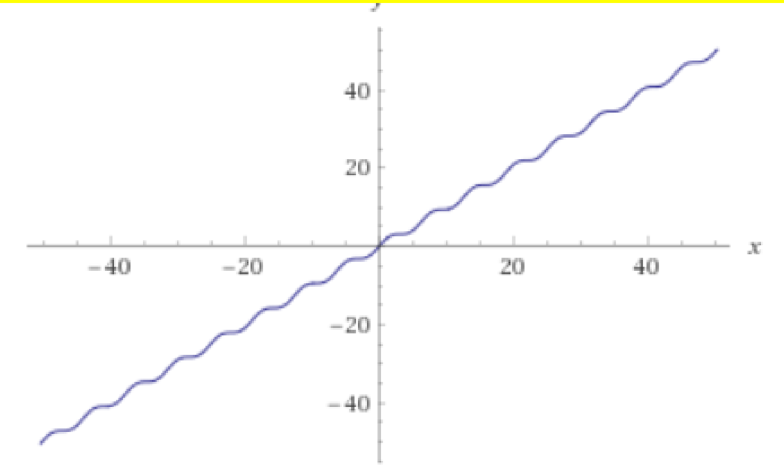


$g(x) = e^{-x^2}$

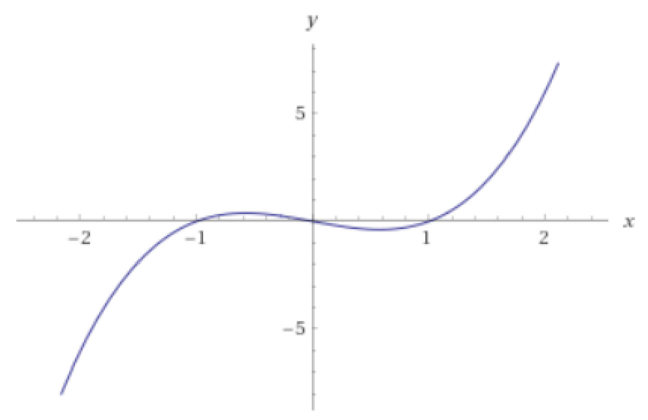


Gráficamente podemos observar que los gráficos de las ***funciones impares*** *tienen una* ***simetría con respecto al origen***

$f(x) = x + senx$



$g(x) = x^3 - x$



3. – FUNCIÓN MONÓTONA

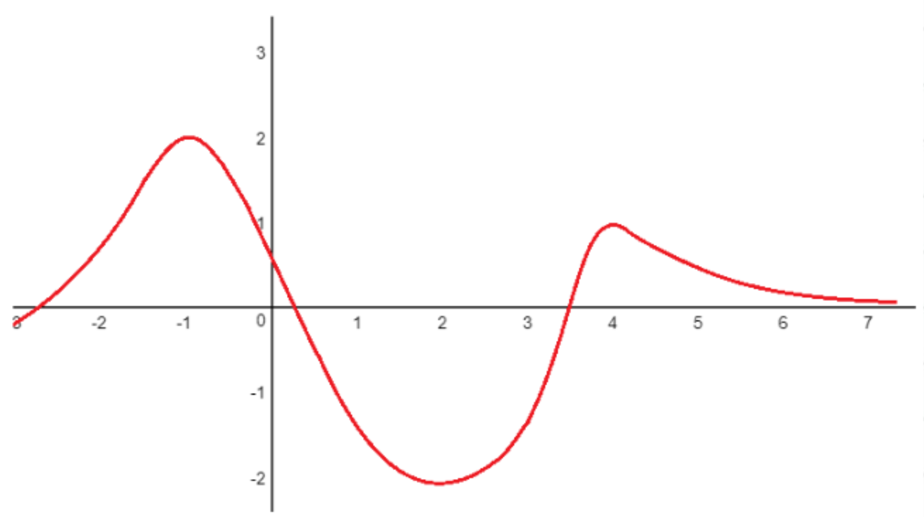
Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ *y f una función* $\quad \boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \mathbb{R}. \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

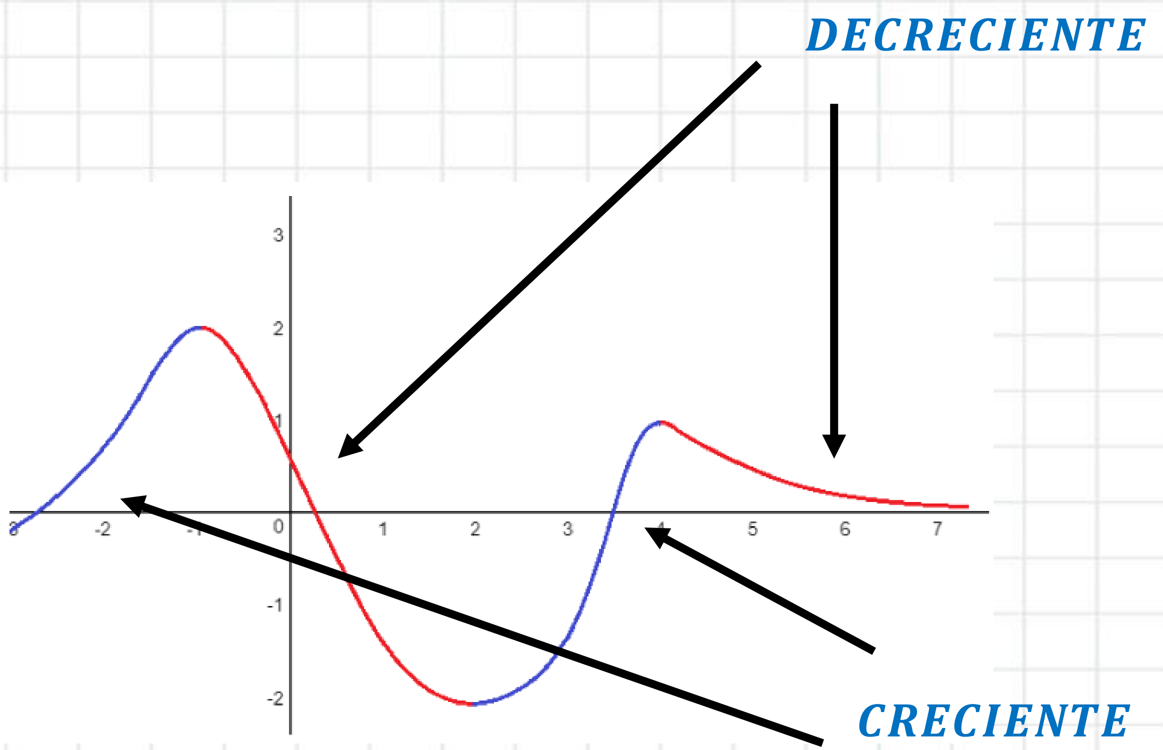
Se dice que ***f es monótona en I*** $(\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{A})$ *si cumple con alguno de los siguientes casos:*

$\forall\, x_1, x_2 \in I \wedge x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$	***MONÓTONA CRECIENTE***
$\forall\, x_1, x_2 \in I \wedge x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$	***MONÓTONA DECRECIENTE***
$\forall\, x_1, x_2 \in I \wedge x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$	***MONÓTONA NO CRECIENTE***
$\forall\, x_1, x_2 \in I \wedge x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$	***MONÓTONA NO DECRECIENTE***

Para determinar ***la monotonía de una función****, puede optarse por* ***dos métodos***

Método gráfico





Método analítico

$$Determinar\ la\ monotonía\ de\ la\ función\ \boldsymbol{F(x)} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{x-1}}{\boldsymbol{x}}}\quad en\ el\ intervalo\ [\boldsymbol{1}, +\infty[$$

$Sean\quad x_1, x_2 \in \ [1: +\infty[\quad tal\ que\ \boldsymbol{x_1 > x_2}$

$$Entonces\quad x_1 > x_2 \geq 1 \quad \rightarrow\ 0 < \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2} \leq 1$$

$$\rightarrow\ -1 \leq -\frac{1}{x_2} < -\frac{1}{x_1} < 0$$

$$\rightarrow\ 0 \leq 1 - \frac{1}{x_2} < 1 - \frac{1}{x_1} < 1$$

$$\rightarrow\ 0 \leq \frac{x_2 - 1}{x_2} < \frac{x_1 - 1}{x_1} < 1$$

$$\rightarrow\ 0 \leq \sqrt{\frac{x_2 - 1}{x_2}} < \sqrt{\frac{x_1 - 1}{x_1}} < 1 \qquad es\ decir\quad \boldsymbol{F(x_2) < F(x_1)}$$

$$o\ equivalentemente\quad \boldsymbol{F(x_1) > F(x_2)}$$

Con esto hemos demostrado que si $\boldsymbol{x_1 > x_2 \rightarrow F(x_1) > F(x_2)}$

$\rightarrow$ ***F es creciente en*** $[\boldsymbol{1};\ +\infty[$

No siempre será necesario alguno de esos métodos para determinar la monotonía de una función

Por ejemplo: $f(x) = x^3 + x - 1$

ya que la función x^3 *es creciente y la función* $x - 1$ *es creciente*

entonces la suma de ambas funciones será creciente también.

La suma de dos funciones crecientes es creciente

La suma de dos funciones decrecientes es decreciente

Sea $f: [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ *una función* ***continua*** *creciente* $\to \boldsymbol{Ranf} = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}); \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})]$

Sea $f: [\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] \to \mathbb{R}$ *una función* ***continua*** *decreciente* $\to \boldsymbol{Ranf} = [\boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}); \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})]$

4. – FUNCIÓN ACOTADA

$Se\ dice\ que\ una\ función\ \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{está}\ \boldsymbol{acotada\ superiormente}\ si\ y\ solo\ si\ \boldsymbol{existe\ M} \in \mathbb{R}\ tal\ que:$

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Domf}\,, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{M}$$

$Se\ dice\ que\ una\ función\ \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{está}\ \boldsymbol{acotada\ inferiormente}\ si\ y\ solo\ si\ \boldsymbol{existe\ m} \in \mathbb{R}\ tal\ que:$

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Domf}\,, \qquad \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

$Se\ dirá\ que\ una\ función\ \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{es\ acotada}\ si\ y\ solo\ si\ es\ \boldsymbol{acotada\ superior\ e\ inferiormente}$

$es\ decir\ si\ \boldsymbol{existen\ m, M} \in \mathbb{R}\ \ tal\ que:$

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Domf}\,, \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{M}$$

$o\ equivalentemente\ si\ \boldsymbol{existe\ M} \in \mathbb{R}\ tal\ que:$

$$\forall\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Domf}\,, |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})| \leq \boldsymbol{M}$$

Ejemplo. – *Sea la función* $\boldsymbol{f}:\ \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\quad \boldsymbol{y=f(x)=\frac{6}{x^2-2x+3}-2}$

$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.\quad (x-1)\in\mathbb{R}$

$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.\quad (x-1)^2\geq 0$

$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.\quad x^2-2x+1\geq 0$

$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.\quad x^2-2x+3\geq 2$

$$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.\ 0<\frac{1}{x^2-2x+3}\leq\frac{1}{2}$$

$$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.\ 0<\frac{6}{x^2-2x+3}\leq 3$$

$$\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.\ -2<\frac{6}{x^2-2x+3}-2\leq 1$$

$\boldsymbol{\forall\, x\ \in\ \mathbb{R}.\ -2<f(x)\leq 1}$ $\rightarrow$ ***f es acotada***

6. – FUNCIÓN INYECTIVA

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$ y f una función $\quad \boldsymbol{f: A \to \mathbb{R}.} \quad \boldsymbol{y = f(x)}$

Se dirá que f es una **función inyectiva** si y solo si **satisface la siguiente condición**:

$$\forall \boldsymbol{a, b \in A} \quad \wedge \quad \boldsymbol{f(a) = f(b) \to a = b}$$

Esto también puede interpretarse de manera equivalente:

$$\forall \boldsymbol{a, b \in A} \quad \wedge \quad \boldsymbol{a \neq b \to f(a) \neq f(b)}$$

No todas las funciones cumplen esta condición, por ejemplo $\quad \boldsymbol{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},} \quad \boldsymbol{y = f(x) = x^2 + 1}$

Intentemos demostrar que $\quad f(a) = f(b) \to a = b$

$$f(a) = f(b) \quad \to a^2 + 1 = b^2 + 1$$

$$\to a^2 - b^2 = 0$$

$$\to (a+b)(a-b) = 0$$

$$\to a + b = 0 \quad \vee \quad a - b = 0$$

$$\to \boldsymbol{a = -b} \quad \vee \quad \boldsymbol{a = b}$$

Por lo tanto f no es inyectiva

Analicemos la inyectividad en otros ejemplos:

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{y = f(x) = x^2 - 3x}$

Para demostrar la inyectividad debemos demostrar que $\forall \boldsymbol{a, b} \in \mathbb{R}$ $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$ ***implica necesariamente que*** $\boldsymbol{a = b}$

$f(a) = f(b)$ $\rightarrow a^2 - 3a = b^2 - 3b$

$\rightarrow a^2 - b^2 - 3a + 3b = 0 \quad \rightarrow (a-b)(a+b) - 3(a-b) = 0$

$\rightarrow (a-b)(a+b-3) = 0$

$\rightarrow a - b = 0 \ \vee \ a + b - 3 = 0$

$\rightarrow a = b \vee a + b = 3$

Por lo tanto f no es inyectiva

$\boldsymbol{g}: [2; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{y = g(x) = x^2 + x + 1}$

Para demostrar la inyectividad debemos demostrar que $\forall \boldsymbol{a, b} \in [2; +\infty[$ $\boldsymbol{g(a) = g(b)}$ ***implica necesariamente que*** $\boldsymbol{a = b}$

$g(a) = g(b)$ $\rightarrow a^2 + a + 1 = b^2 + b + 1$

$\rightarrow a^2 - b^2 + a - b = 0 \quad \rightarrow (a-b)(a+b) + (a-b) = 0$

$\rightarrow (a-b)(a+b+1) = 0 \quad \rightarrow a - b = 0 \ \vee \ a + b + 1 = 0$

$\rightarrow a = b \vee a + b = -1$

pero ya que $a, b \in [2; +\infty[$ *es imposible que* $a + b = -1$

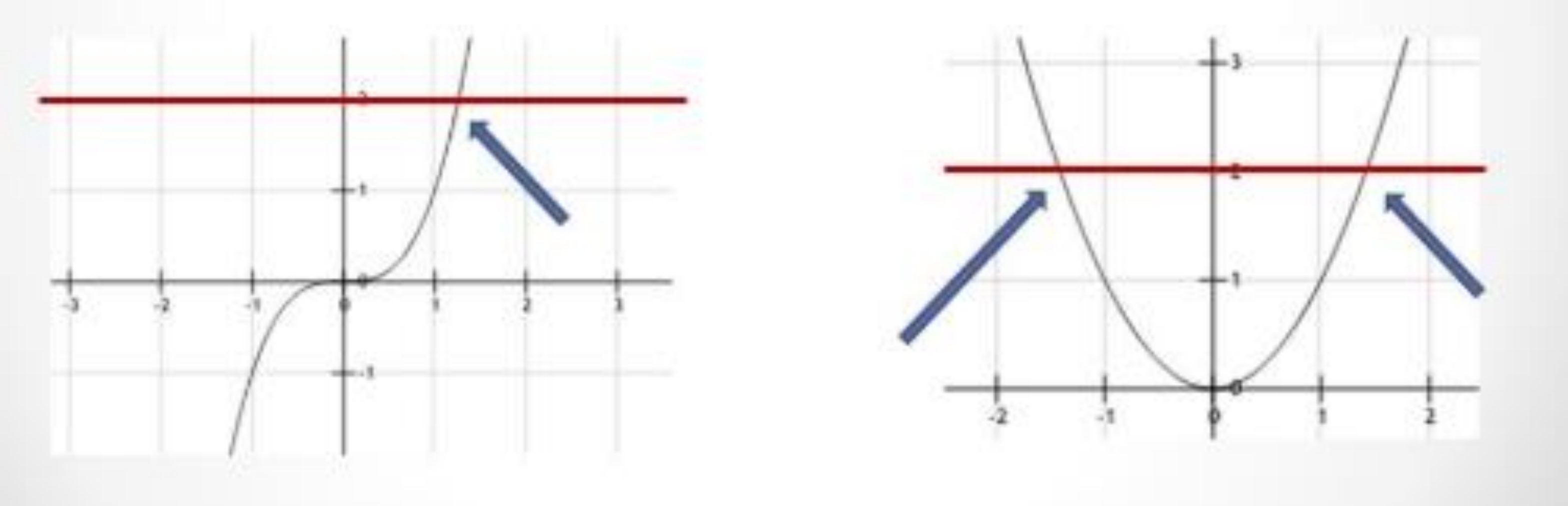
por lo tanto solo puede ocurrir que $a = b$

Por lo tanto g es inyectiva

Las funciones inyectivas también son denominadas ***UNIVALENTES*** *o funciones* ***DE UNO A UNO***

Gráficamente podemos tener ***LA PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL***

La gráfica de una función inyectiva solo puede tener un punto de intersección con una recta horizontal



Función inyectiva   Función NO inyectiva

7. – FUNCIÓN SURYECTIVA

$Sea\ A, B\ subconjuntos\ de\ \mathbb{R}\ y\ f\ una\ función$ $\quad \boldsymbol{f: A \to B} \quad \boldsymbol{y = f(x)}$

$Se\ dirá\ que\ f\ es\ una\ función\ \ suryectiva\ si\ y\ solo\ si\ satisface\ la\ siguiente\ condición:$

$$\forall\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B} \ \ \exists\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}: \ \ \boldsymbol{y = f(x)}$$

$lo\ cual\ es\ equivalente\ a\ decir\ que:$

$$\boldsymbol{Ranf = B}$$

$\boldsymbol{Por\ ejemplo\ sea\ la\ función:}$ $\quad \boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{y = f(x) = 2x + 1}$

$esta\ función\ sí\ satisface\ que$ $\ \forall\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}\ \exists\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}: \ \ \boldsymbol{y = 2x + 1}$

$Es\ decir\ que$ $\boldsymbol{para\ cualquier\ valor\ de\ y, podemos\ hallar\ un\ x}$ $\ tal\ que$ $\boldsymbol{y = f(x)}$

$Por\ ejemplo\ para\ \ y = 9\ \ \ existe\ x = 4\ \ \ donde\ \ 9 = f(4)$

$$para\ \ y = 4\ \ \ existe\ x = \frac{3}{2}\ \ \ donde\ \ 4 = f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$inclusive\ hasta\ podemos\ generalizar\ esto, diciendo\ que$ $\boldsymbol{para\ cada\ y}$ $existe\ un$ $\boldsymbol{x = \frac{y-1}{2}}$ $\ \ \boldsymbol{tal\ que\ y = f(x)}$

$\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \boldsymbol{y = f(x) = 2x + 1}$ $\ \ \boldsymbol{es\ una\ función\ suryectiva}$

PITAGORAS ACADEMIA

Por ejemplo sea la función: $\boldsymbol{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{y=f(x)=x^2+3}$

Esta función ***no satisface*** *que* $\forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}\ \ \exists\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}:\ \boldsymbol{y=x^2+3}$

ya que por ejemplo para valores de $\boldsymbol{y=2}$ ***o*** $\boldsymbol{y=-1}$, *no existe tal* x.

Pero por otro lado sea la función: $\boldsymbol{g}:\mathbb{R}\to[\mathbf{4};+\infty[$, $\boldsymbol{y=g(x)=x^2+4}$

Esta función ***sí satisface que*** $\forall\,\boldsymbol{y}\in[\mathbf{4};+\infty[\ \exists\,\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}:\ \boldsymbol{y=x^2+4}$

ya que para cualquier $\boldsymbol{y}\in[\mathbf{4};+\infty[$ *podemos encontrar* $x=\sqrt{y-4}$ *o* $x=-\sqrt{y-4}$

que satisfará que $x^2+4=y$ *y por lo tanto* ***g es suryectiva***

De ahora en adelante ***bastará con verificar*** *que* $\boldsymbol{Ranf=B}$ *para analizar la* ***suryectividad***

$Ejemplo$: $\quad Analizar\ la\ suryectividad\ de$: $\quad f: [-1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[\quad y = f(x) = x^2 + 6x + 7$

$debemos\ comprobar\ que\ \ Ranf = [2; +\infty[$

$ya\ que\ x \in [-1; +\infty[\quad esto\ significa\ que\ x \geq -1 \qquad \rightarrow x + 3 \geq 2$

$\rightarrow x^2 + 6x + 9 \geq 4$

$\rightarrow x^2 + 6x + 7 \geq 2$

$\boldsymbol{por\ lo\ tanto\ Ranf} = [\mathbf{2}; +\infty[$

$f: [-1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[\quad y = f(x) = x^2 + 6x + 7\ es\ suryectiva$

$Las\ funciones\ que\ son\ suryectivas\ también\ son\ conocidas\ como$:
$Sobreyectivas, suprayectivas, subyectivas, epiyectivas, exhaustivas$

PITAGORAS ACADEMIA

8. – FUNCIÓN BIYECTIVA

Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ y f una función definida de A a B, con regla de correspondencia $y = f(x)$ es decir:

$\boxed{f: A \to B. \quad y = f(x)}$

Se dice que f es **biyectiva** si y solo si es **inyectiva y suryectiva** simultáneamente.

es decir $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$ **implica que** $\boldsymbol{a = b}$ y además $\forall\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\ \exists\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ **tal que** $\boldsymbol{y = f(x)}$

es decir $\forall\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\ \exists!\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ **tal que** $\boldsymbol{y = f(x)}$

Ejemplo

$$g: [1; +\infty[\to [5; +\infty[\,, \qquad y = g(x) = x^2 + 4$$

$$g(a) = g(b) \to a^2 + 4 = b^2 + 4$$

$$\to a^2 = b^2 \text{ y ya que } a, b \geq 1 \text{ entonces } a = b$$

$\boxed{\to g \text{ es inyectiva}}$

$\therefore g$ es biyectiva

$$\text{Además ya que } x \geq 1 \text{ entonces } x^2 + 4 \geq 5$$

$$\to Rang = [5; +\infty[$$

$\boxed{\to g \text{ es suryectiva}}$

10. – PROPIEDADES

1. – *Si* f *y* g *son sobreyectivas entonces* $\boldsymbol{g \circ f}$ *y* $\boldsymbol{f \circ g}$ *es sobreyectiva.*

2. – *Si* f *y* g *son inyectivas entonces* $\boldsymbol{g \circ f}$ *y* $\boldsymbol{f \circ g}$ *es inyectiva.*

3. – *Si* f *y* g *son biyectivas entonces* $\boldsymbol{g \circ f}$ *y* $\boldsymbol{f \circ g}$ *es biyectiva.*

4. – *Si* $g \circ f$ *es inyectiva entonces* f *es inyectiva* (g *no necesariamente*)

5. – *Si* $g \circ f$ *es sobreyectiva entonces* g *es sobreyectiva* (f *no necesariamente*)

CARDINALIDAD *Sea* $f: \ A \to B$, A *y* B *conjuntos finitos*

Si f *es inyectiva entonces* $n(A) \leq n(B)$

Si f *es sobreyectiva entonces* $n(A) \geq n(B)$

Si f *es biyectiva entonces* $n(A) = n(B)$ *(conjuntos equipotentes)*

(equinumerosos)

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

PROBLEMAS RESUELTOS

01.- Indique cuál de las siguientes funciones no es par

A) $f(x) = x^2 + |x| + 1$
B) $g(x) = xsgn(x)$
C) $h(x) = |x| + cosx$
D) $p(x) = x|x| - 1$
E) $q(x) = sen(|x| - 1)$

SOLUCIÓN

$A)\quad f(x) = x^2 + |x| + 1$

$\rightarrow\quad f(-x) = (-x)^2 + |-x| + 1$

$\rightarrow\quad f(-x) = x^2 + |x| + 1$

$\rightarrow\quad f(-x) = f(x)$

$además\ Domf = \mathbb{R}$

$\rightarrow\quad \boldsymbol{f\ es\ par}$

$B)\quad f(x) = x \operatorname{sgn} x$

$\rightarrow\quad f(-x) = (-x)\operatorname{sgn}(-x)$

$\rightarrow\quad f(-x) = (-x).(-\operatorname{sgn} x)$

$\rightarrow\quad f(-x) = x \operatorname{sgn} x$

$\rightarrow\quad f(-x) = f(x)$

$además\ Domf = \mathbb{R} \quad \rightarrow\quad \boldsymbol{f\ es\ par}$

$C)\quad f(x) = |x| + \cos x$

$\rightarrow\quad f(-x) = |-x| + \cos(-x)$

$\rightarrow\quad f(-x) = |x| + \cos x$

$\rightarrow\quad f(-x) = f(x)$

$además\ Domf = \mathbb{R} \quad \rightarrow\quad \boldsymbol{f\ es\ par}$

$D)\quad f(x) = x|x| - 1$

$\rightarrow\quad f(-x) = (-x)|-x| - 1$

$\rightarrow\quad f(-x) = -x|x| - 1$

$\rightarrow\quad \boldsymbol{f\ no\ es\ par\ ni\ impar}$

$E)\quad f(x) = sen(|x| - 1)$

$\rightarrow\quad f(-x) = sen(|-x| - 1)$

$\rightarrow\quad f(-x) = sen(|x| - 1)$

$\rightarrow\quad f(-x) = f(x)$

$además\ Domf = \mathbb{R}$

$\rightarrow\quad \boldsymbol{f\ es\ par}$

CLAVE D

02. Sea $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$

Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos

I. Ran (f) = ⟨–1; 2]

II. Ran (f) = ⟨–1; 1⟩

III. f es creciente en R.

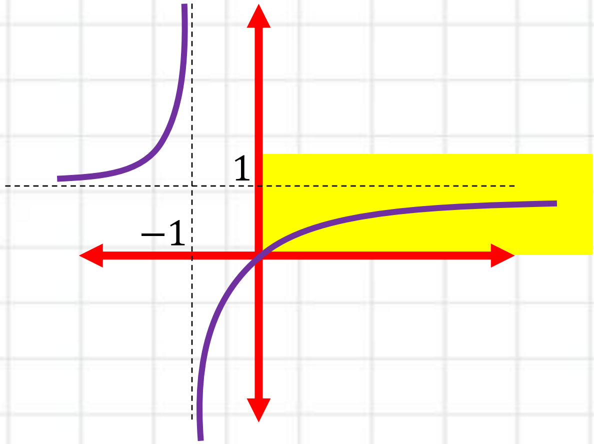
A) solo I B) solo II C) solo III

D) I y II E) II y III

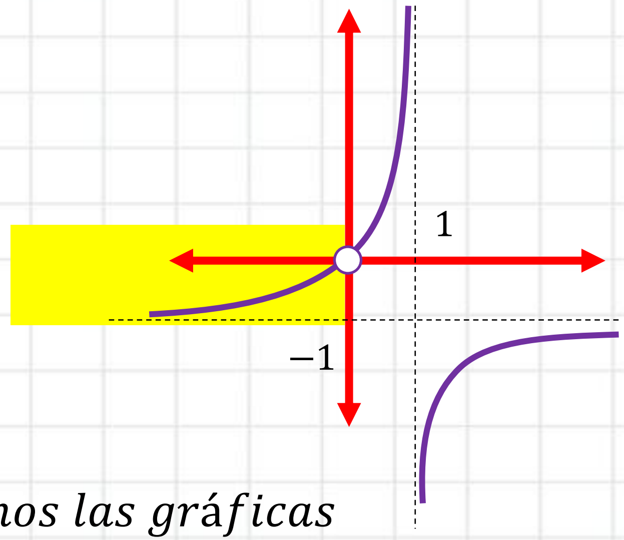
SOLUCIÓN

Para hallar el rango de la función y también determinar la monotonicidad, graficaremos:

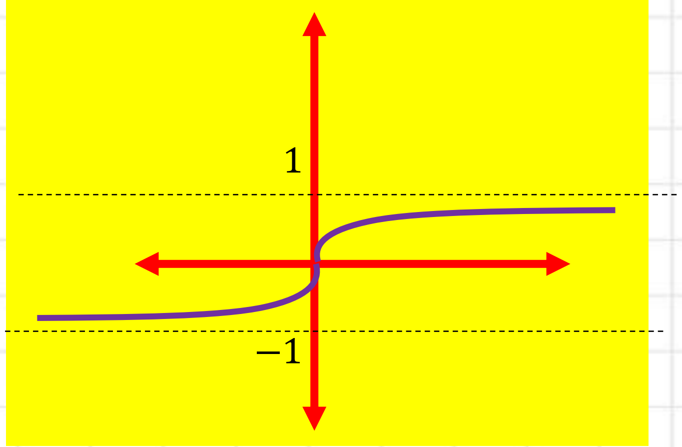
$$\#1)\quad x \geq 0 \quad \rightarrow \quad |x| = x \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{x}{1+x}$$



$$\#2)\quad x < 0 \quad \rightarrow \quad |x| = -x \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{x}{1-x}$$



#3) *Unimos las gráficas*



Observamos: $Ranf =< -1; 1 >$

f *es creciente.*

CLAVE E

03. Sean f, g : R → R determine cuantas afirmaciones son falsas:

I. Si f y g son crecientes, f + g es creciente.

II. Si f y g son decrecientes f + g es decreciente.

III. Si f y g son crecientes, f-g es decreciente.

IV. fg es creciente, si f y g son crecientes.

V. f es creciente, entonces f^2 es creciente.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 5

SOLUCIÓN

$I)\ V.$ *es propiedad.*

$f\ es\ creciente:\ x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$g\ es\ creciente:\ \rightarrow g(x_1) > g(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$+$

$\rightarrow f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$

$\rightarrow (f+g)(x_1) > (f+g)(x_2) \quad \rightarrow \quad f + g\ es\ creciente.$

$II)\ V.$ *es propiedad.*

$III)\ F,$ $por\ ejm\ f(x) = 5x + 6\ es\ una\ función\ creciente$

$g(x) = 3x + 1\ es\ una\ función\ creciente$

$(f - g)(x) = 2x + 5\ también\ es\ una\ función\ creciente.$

$IV)\ F,$ $f(x) = x\ es\ creciente, al\ igual\ que\ g(x) = 2x$

sin $embargo\ \ f.g(x) = 2x^2\ la\ cual\ no\ es\ una\ función\ monótona.$

$V)\ F,$ $f(x) = x\ es\ creciente, pero\ f^2(x) = x^2\ no\ es\ creciente.$

CLAVE C

PITAGORAS ACADEMIA

04. Si $x \in [-3;1]$ entonces

$m \le \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+20}} \le M$. Calcule máximo de m + mínimo de M.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{9}{20}$ C) 2

D) 3 E) 12

SOLUCIÓN

Notemos que: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2+16}}$

y ya que $x \in [-3;1]$

$\rightarrow \quad -3 \le x \le 1$

$\rightarrow \quad -1 \le x+2 \le 3$

$\rightarrow \quad 0 \le (x+2)^2 \le 9 \quad \rightarrow \quad 16 \le (x+2)^2+16 \le 25$

$\rightarrow \quad 4 \le \sqrt{(x+2)^2+16} \le 5$

$\rightarrow \quad \dfrac{1}{5} \le \dfrac{1}{\sqrt{(x+2)^2+16}} \le \dfrac{1}{4}$

$$\rightarrow \quad \underbrace{\ldots -\frac{5}{2} \le -1 \le 0 \le \frac{1}{7} \le \frac{1}{5}}_{\text{valores de } m \text{ (cotas inferiores)}} \le \frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+16}} \le \underbrace{\frac{1}{4} \le \frac{1}{2} \le 1 \le 3 \le \pi \ldots}_{\text{valores de } M \text{ (cotas superiores)}}$$

mayor valor de m: $\boldsymbol{m = \frac{1}{5}}$ *menor valor de M:* $\boldsymbol{M = \frac{1}{4}}$

$\rightarrow$ ***Respuesta:*** $\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{20}$

CLAVE B

05. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

i) $\{(x\,;\,|9-x^2|)\,/\,x \in R\}$ es una función acotada inferiormente.

ii) La función $f: R \to R\,/\,f(x)=\dfrac{1999}{x^2+1}$ es una función acotada superiormente.

iii) La función definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x; & -3<x<0 \\ 5\sqrt{x}; & 0 \le x \le 4 \end{cases}$$ es acotada

A) VFV B) VFF C) FVV

D) FFV E) VVV

SOLUCIÓN

I) V, $f(x)=|9-x^2| \geq \mathbf{0}$

$\rightarrow$ *f es acotada inferiormente*

TAREA: Demostrar que también es acotada superiormente

II) V $\forall x \in \mathbb{R}:\quad x^2 \geq 0$

$$x^2+1 \geq 1$$

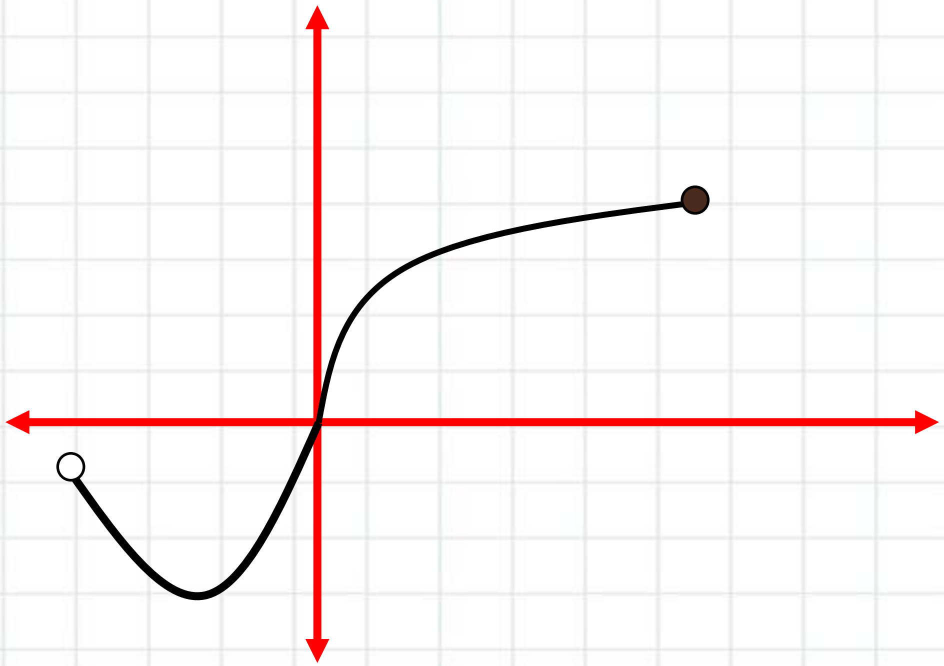
$$0<\frac{1}{x^2+1} \leq 1$$

$$0<\frac{1999}{x^2+1} \leq 1999$$

$$\mathbf{0<f(x) \leq 1999}$$

$\rightarrow$ ***f es acotada***

III) V



$\rightarrow$ ***f es acotada***

CLAVE E

06. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos:

I. Si f es una función definida por: $f(x)=\dfrac{2x-5}{x-2}$ con $x > 3$, entonces f es inyectiva.

II. Si g es una función definida por: $g(x) = \sqrt{x^2-16}-1$ con $x \in \langle -5; -4\rangle$, entonces g es inyectiva.

III. Si h es una función definida por: $h(x) = -x^2 + 2x + 2$ con $x \in \langle 0; 2]$, entonces h es inyectiva.

A) I y III B) II y III C) solo III
D) I, II y III E) I y II

SOLUCIÓN

I) V $\quad f(a)=f(b), \quad a,b>3$

$$\frac{2a-5}{a-2}=\frac{2b-5}{b-2}$$

$$\frac{2a-5}{a-2}-2=\frac{2b-5}{b-2}-2$$

$$\frac{-1}{a-2}=\frac{-1}{b-2}$$

$$\frac{-1}{a-2}=\frac{-1}{b-2}$$

$\rightarrow \quad a=b$

$\rightarrow$ ***f es inyectiva.***

II) V $\quad g(a)=g(b), \quad a,b \in\, <-5;-4>$

$\rightarrow \sqrt{a^2-16}-1=\sqrt{b^2-16}-1$

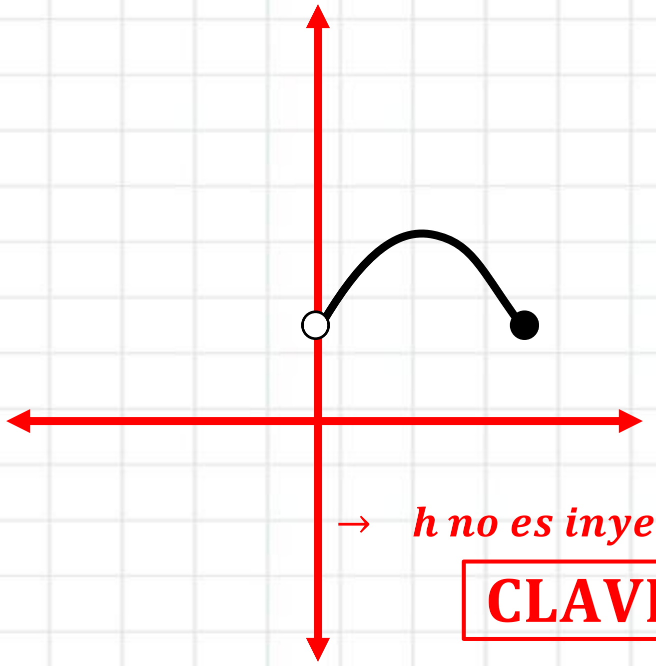
$\rightarrow a^2=b^2$

$\rightarrow a=b \quad \vee \quad a=-b$

$pero\ a,b \in\, <-5;-4> \quad \rightarrow a=b$

$\rightarrow$ ***g es inyectiva.***

III) F, *graficando*:



$\rightarrow$ ***h no es inyectiva.***

CLAVE E

07. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones donde las funciones $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I. Si f es creciente, entonces f es inyectiva.

II. Si f y g son inyectivas, entonces $f \circ g$ es inyectiva.

III. Si $f \circ g$ es inyectiva, entonces g es inyectiva.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVV E) VFF

SOLUCIÓN

I) V, *demostración:*

Para demostrar que una función es inyectiva debemos demostrar $\boldsymbol{a = b}$ *a partir de* $\boldsymbol{f(a) = f(b)}$.
Pero si $f(a) = f(b)$ *entonces* ***no puede cumplirse*** $\boldsymbol{a > b}$ *ya que* $f(a) > f(b)$ $(f \text{ es creciente})$ *y análogamente* ***tampoco puede cumplirse*** $\boldsymbol{a < b}$

$\rightarrow \boldsymbol{a = b}$ $\rightarrow$ ***toda función creciente es inyectiva.***

II) V, *demostración:*

Sean f y g dos funciones inyectivas

Sea $fog(a) = fog(b)$

$\rightarrow f(g(a)) = f(g(b))$ *y como f es inyectiva:*

$\rightarrow g(a) = g(b)$ *y como g es inyectiva:*

$\rightarrow a = b$ $\rightarrow$ ***fog es inyectiva.***

III) V, *demostración:*

Partiremos de: $g(a) = g(b)$

$\rightarrow f(g(a)) = f(g(b))$

$\rightarrow f \circ g\,(a) = f \circ g\,(b)$

y como $f \circ g$ *es inyectiva:*

$\rightarrow a = b$ $\rightarrow$ ***fog es inyectiva.***

CLAVE A

08. Dada la función f biyectiva, tal que $f: [m; 4] \to [6; n]$, $f(x) = -2x^2 + 16x - 24$.

Determine el valor de $T = \dfrac{m+5}{n}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

SOLUCIÓN

Notemos que: $\boldsymbol{f(x) = -2(x-4)^2 + 8}$

Dominio de f: $[m; 4] \to m \le x \le 4$

$\to m - 4 \le x - 4 \le 0$

$\to 0 \le (x-4)^2 \le (m-4)^2$

$\to -2(m-4)^2 \le -2(x-4)^2 \le 0$

$\to -2(m-4)^2 + 8 \le -2(x-4)^2 + 8 \le 8$

$\to Rang = [-2(m-4)^2 + 8; 8]$

y ya que f es biyectiva entonces también es sobreyectiva

$\to Ranf = [6; n]$

$\to -2(m-4)^2 + 8 = 6 \quad \wedge \quad n = 8$

$\to \boldsymbol{m = 3 \quad \wedge \quad n = 8}$

CLAVE A

09.- Determine el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I.- Si f es creciente siendo su Df=[2;5], entonces su rango es Rf=[f(2);f(5)]

II.- Si $f: A \rightarrow B$ es decreciente, entonces f es no creciente.

III.- Existe al menos una función par que es creciente.

A) FFF B) VVV C) FVF

D) VFF E) FVV

SOLUCIÓN

$I)\ F,\quad la\ propiedad\ correcta\ es:$

$Si\ f\ es\ continua\ y\ creciente\ en\ [a;b]$

$entonces\ R_F = [f(a); f(b)]$

$II)\ V, toda\ función\ decreciente\ es\ no\ creciente$

$así\ como\ toda\ función\ creciente\ es\ no\ decreciente.$

$III)\ F, una\ función\ par\ no\ puede\ ser\ creciente.$

$\boldsymbol{Rpta:\quad FVF}$

CLAVE C

10.- Determine cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

I.- Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par, entonces f no es biyectiva.

II.- Existe $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función par e inyectiva.

III.- Existe alguna función $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}$ que sea par e inyectiva.

IV.- Si $f: [-\sqrt{2}; \sqrt{2}] \to \mathbb{R}$ es par e impar a la vez, entonces f es monótona.

V.- Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función decreciente y acotada, entonces f no es biyectiva.

A) 1　B) 2　C) 3

D) 4　E) 5

SOLUCIÓN

$I)\ V, ya\ que\ si\ f\ es\ par\ definida\ en\ todo\ \mathbb{R}$
$entonces\ no\ puede\ ser\ inyectiva\ y\ por\ lo\ tanto$
$no\ puede\ ser\ biyectiva.$

$II)\ F, ya\ que\ si\ f\ es\ par\ definida\ en\ todo\ \mathbb{R}$
$entonces\ no\ puede\ ser\ inyectiva$

$III)\ V,\quad por\ ejm\ \ f:\{0\} \to \mathbb{R}\ \ , f(x) = 3\ \ es\ par\ e\ inyectiva.$

$IV)\ V,\quad si\ f\ es\ par\ e\ impar\ a\ la\ vez\ entonces\ f(x) = 0\ \ (constante)$
$y\ entonces\ sí\ sería\ monótona\ (no\ creciente\ y\ no\ decreciente\ a\ la\ vez).$

$V)\ V,\quad ya\ que\ si\ f\ es\ acotada\ entonces\ Ranf \neq \mathbb{R}\ y\ por\ lo\ tanto$
$ya\ no\ podría\ ser\ sobreyectiva\ y\ por\ lo\ tanto\ tampoco\ biyectiva.$

CLAVE D

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS